Matematika Mérnököknek 1.

Baran Ágnes

Gyakorlat
Numerikus matematika

Lebegőpontos számok

Példa

$a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ esetén mi lesz a 0.1875 lebegőpontos alakja?

Megoldás.

$$\begin{array}{r|l} 0. & 1875 \\ 0 & 375 \\ 0 & 75 \\ 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$0.1875_{10} = 0.0011_2$

Normalizálás után: $2^{-2} \cdot 0.1100$

Példa

$a = 2,\ t = 4,\ k_- = -3,\ k_+ = 2$ esetén mi lesz a $\frac{1}{3}$ lebegőpontos alakja?

Megoldás.

$$\begin{array}{r|l} 0. & 3333\ldots \\ 0 & 6666\ldots \\ 1 & 3333\ldots \\ 0 & 6666\ldots \\ 1 & 3333\ldots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$0.3333\ldots_{10} = 0.0101010\ldots_2$

Normalizálás után: $2^{-1} \cdot 0.101010\ldots$

Levágás esetén: $2^{-1} \cdot 0.1010$

Szabályos kerekítés esetén: $2^{-1} \cdot 0.1011$

Feladat

*(a) $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 3$ *esetén mi lesz az alábbi számok lebegőpontos alakja?*

$$0.9375, \quad 0.1, \quad 0.6, \quad \frac{1}{32}, \quad 2.625,$$

(b) *Adott* a, t, k_- *és* k_+ *mellett írja fel a legnagyobb ábrazolható lebegőpontos számot* (M_∞), *a legkisebb pozitív normalizált ábrázolható számot* (ε_0), *illetve az* 1 *jobb- és baloldali szomszédját!*

(c) *Adott* a, t, k_- *és* k_+ *mellett hány darab pozitív lebegőpontos szám írható fel?*

(d) $a = 2$, $t = 4$, $k_- = -3$, $k_+ = 2$ *esetén ábrázolja számegyenesen az összes pozitív lebegőpontos számot!*

Feladat

*(1) Olvassa el a Matlab eps függvényének help-jét.

*(2) Vizsgálja meg számítógépén a $0.4 - 0.5 + 0.1 == 0$ logikai kifejezés értékét! Mi lesz a $0.1 - 0.5 + 0.4 == 0$ logikai kifejezés értéke?

*(3) Legyen $x = 1/3$. Ciklusban futtassuk le negyvenszer az $x = 4x - 1$ utasítást, ami elméletileg az $x = 1/3$ értéket adja vissza. Mit tapasztalunk a gyakorlatban?

*(4) Vizsgálja meg számítógépén a $10^{20} + 1 == 10^{20}$, $10^{20} + 10 == 10^{20}$, $10^{20} + 100 == 10^{20}$, $10^{20} + 1000 == 10^{20}$ és $10^{20} + 10000 == 10^{20}$ logikai kifejezések értékét!

Feladat

*(5) Az alábbi algoritmus elméletileg minden $x \geq 0$ esetén az x eredeti értékét adja vissza. Vizsgálja meg mi történik a gyakorlatban, ha az algoritmust $x = 1000$, $x = 100$ kezdőértékkel futtatja! Mi az oka a tapasztalt jelenségnek?

```
for i=1:60
   x=sqrt(x);
end
for i=1:60
   x=x^2;
end
```

(6) Ismert, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Számítsa ki Matlab-bal az $\frac{e^x-1}{x}$ hányados értékét egyre csökkenő x értékek esetén! ($x = 1$ kezdőértékkel x-et 40-szer, 200-szor, 2000-szer felezgetve írassa ki a kifejezés értékét!) Magyarázza meg a tapasztalt jelenséget!

Feladat

*(7) Oldja meg Matlab-bal az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}. \text{ ill. } b = \begin{pmatrix} 1.98 \\ 1.98 \end{pmatrix}.$$

(8) Számítsa ki a 6×6-os Hilbert-mátrix kondíciószámát! (Használja a `cond` és `hilb` MATLAB-függvényeket!) Legyen B egy 6×6-os véletlen mátrix (használja a `rand` függvényt), számítsa ki B kondíciószámát is (végezzen több kísérletet)!

Feladat

*(9) Állítsa elő a következő $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ mátrixot és $b \in \mathbb{R}^{100}$ vektort, és a `backslash` operátort használva oldja meg az $Ax = b$ egyenletrendszert. Ezután perturbálja a b vektort, pl. 1 helyett legyen $b(100) = 1.00001$ és oldja meg a rendszert újra. Számítsa ki az A kondíciószámát.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ -1, & \text{ha } i < j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad b = (-98, -97, \ldots, 0, 1)^T.$$

Legkisebb négyzetes közelítések, polinomiális modell

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenest!

t_i	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
f_i	8	8.9	9	9.8	10	11	11.5	11.5	12.5	13	13.7	14

Megoldás. Használjuk a `polyfit` függvényt!

```
p=polyfit(t,f,m)
```

megadja a (t_i, f_i) adatokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő legfeljebb m-edfokú polinom együtthatóit a főegyütthatóval kezdve.

```
>> t=[1 1.1 1.1:0.1:2];
>> f=[8 8.9 9 9.8 10 11 11.5 11.5 12.5 13 13.7 14];
>> p=polyfit(t,f,1)
p=
  5.8235     2.5338
```

A keresett egyenes egyenlete:

$$f(t) = 5.8235t + 2.5338$$

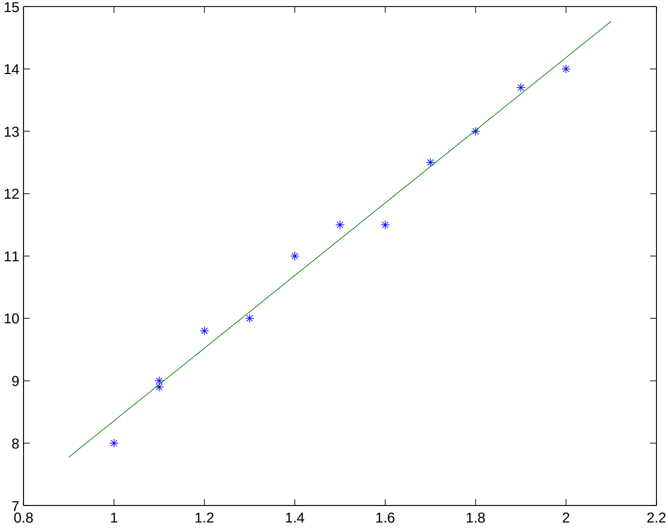
Ha ábrázolni szeretnénk az adatokat és az illesztett egyenest, akkor használhatjuk a `refline` függvényt. Ennek első argumentumaként az egyenes meredekségét, másodikként a konstanstagot kell megadni, azaz pontosan a `p` vektort:

```
>> figure; plot(t,f,'*');
>> hold on; refline(p)
```

Másik lehetőség (ami tetszőleges polinom esetén alkalmazható):

```
>> xx=linspace(0.9,2.1);
>> yy=polyval(p,xx);
>> figure; plot(t,f,'*',xx,yy)
```

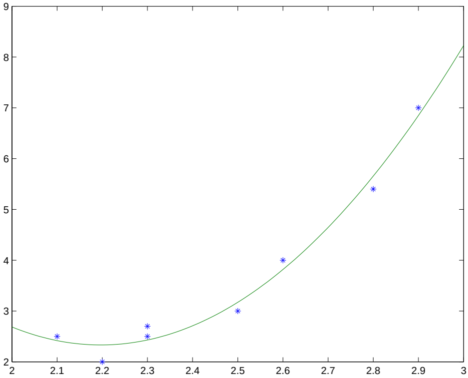
A `polyval` függvény a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx`-ben adott helyeken.


15
14
13
12
11
10
9
8
7
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2

*Feladat

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő másodfokú polinomot!

t_i	2.1	2.2	2.3	2.3	2.5	2.6	2.8	2.9
f_i	2.5	2	2.5	2.7	3	4	5.4	7



Legkisebb négyzetes közelítések

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokat legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 \cos(\pi t) + x_3 \sin(\pi t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	3.9	2.6	-0.8	0.3	3.2	3.8	3.2	-0.7	-0.9

Megoldás. A paramétereket az

$$A^T A x = A^T f$$

Gauss-féle normálegyenlet megoldása szolgáltatja.

$$A^T A x = A^T f$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\pi t_1) & \sin(\pi t_1) \\ 1 & \cos(\pi t_2) & \sin(\pi t_2) \\ \vdots & & \\ 1 & \cos(\pi t_9) & \sin(\pi t_9) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_9 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Állítsuk elő a megadott adatokból az A mátrixot:

```
>> t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';
>> f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';
>> A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];
```

Oldjuk meg a normálegyenletet!

```
>> x=(A'*A)\(A'*f)
x =

    1.4372
    2.0310
    1.1711
```

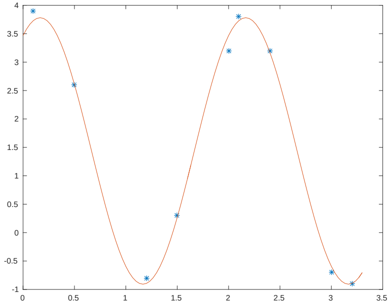
A legjobban illeszkedő adott alakú modell tehát:

$$F(t) = 1.4372 + 2.0310\cos(\pi t) + 1.1711\sin(\pi t)$$

Ábrázoljuk az adatokat és az illesztett modellt!

```
>> xx=linspace(0,3.3);
>> yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);
>> plot(t,f,'*',xx,yy)
```

```
t=[0.1 0.5 1.2 1.5 2 2.1 2.4 3 3.2]';
f=[3.9 2.6 -0.8 0.3 3.2 3.8 3.2 -0.7 -0.9]';
A=[ones(9,1), cos(pi*t), sin(pi*t)];
x=(A'*A)\(A'*f);
xx=linspace(0,3.3);
yy=x(1)+x(2)*cos(pi*xx)+x(3)*sin(pi*xx);
plot(t,f,'*',xx,yy)
```



Feladatok

*(1) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő egyenes egyenletét!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2
f_i	6.2	7	8	7.9	8.4	9.2	10	10.6

*(2) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő harmadfokú polinomot!

t_i	0.5	0.8	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
f_i	2.5	2.3	1.8	1.3	0.9	0.4	0.1	-0.05	-0.01

*(3) Határozza meg az alábbi adatokat legjobban közelítő

$$F(t) = a + \frac{b}{t}$$

alakú modell paramétereit!

t_i	1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.7	1.9	2	2.1	2.2
f_i	4.2	3.8	3.4	3.3	3.3	3	2.8	2.8	2.75	2.7

Feladatok

*(4) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 \sin(t) + x_2 \sin(2t) + x_3 \sin(3t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2	3.4	3.8	4	4.2	4.6	5
f_i	1	4.1	3	1	-1.5	-1.6	-1.7	-0.4	0.1	0.7	1.6	1.8	1.6	0.2	-2.5

(5) Határozza meg az alábbi adatokat négyzetesen legjobban közelítő

$$F(t) = x_1 + x_2 ln(t)$$

alakú modell paramétereit!

t_i	0.1	0.5	1.2	1.5	2	2.1	2.4	3	3.2
f_i	-0.6	1.5	2.5	2.9	3.2	3.3	3.5	3.8	3.9

Lagrange-interpoláció

Példa

Határozzuk meg a $(-2,-5),(-1,3),(0,1),(2,15)$ *pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!*

Megoldás. Készítsük el az osztott differenciák táblázatát!
Az első két oszlopba az alappontok és a megfelelő függvényértékek kerülnek:

$$\begin{array}{r|r} -2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 15 \end{array}$$

Számítsuk ki az elsőrendű osztott differenciákat!

$$
\begin{array}{r|r l}
-2 & -5 & \\
 & & \frac{3-(-5)}{-1-(-2)} = 8 \\
-1 & 3 & \\
 & & \frac{1-3}{0-(-1)} = -2 \\
0 & 1 & \\
 & & \frac{15-1}{2-0} = 7 \\
2 & 15 &
\end{array}
$$

Számítsuk ki a másodrendű osztott differenciákat!

$$\begin{array}{r|rrl}
-2 & -5 & & \\
 & & 8 & \\
-1 & 3 & & \frac{-2-8}{0-(-2)} = -5 \\
 & & -2 & \\
0 & 1 & & \frac{7-(-2)}{2-(-1)} = 3 \\
 & & 7 & \\
2 & 15 & &
\end{array}$$

Számítsuk ki a harmadrendű osztott differenciát!

$$
\begin{array}{r|rrrl}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & \frac{3-(-5)}{2-(-2)} = 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & &
\end{array}
$$

A táblázat felső élét használva írjuk fel a polinomot!

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & 2 \\
0 & 1 & & 3 & \\
 & & 7 & & \\
2 & 15 & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = -5 + 8(x+2) - 5(x+2)(x+1) + 2(x+2)(x+1)x$$

Megj.:

A Lagrange-polinom nem függ az adatok sorrendjétől, így választhattuk volna a táblázat alsó élét is:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -5 & & & \\
 & & 8 & & \\
-1 & 3 & & -5 & \\
 & & -2 & & {\color{red}2} \\
0 & 1 & & {\color{red}3} & \\
 & & {\color{red}7} & & \\
2 & {\color{red}15} & & &
\end{array}
$$

$$L_3(x) = {\color{red}15} + {\color{red}7}(x-2) + {\color{red}3}(x-2)x + {\color{red}2}(x-2)x(x+1)$$

Mindkét esetben

$$L_3(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

Feladat

(1) *Írja fel az alábbi pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!*

- *(a) $(-3,-6)$, $(-2,-17)$, $(-1,-8)$, $(1,-2)$, $(2,19)$,
- *(b) $(-3,-31)$, $(-2,-8)$, $(1,1)$, $(2,22)$,
- (c) $(-2,-13)$, $(-1,-4)$, $(1,2)$,
- (d) $(-2,-5)$, $(-1,3)$, $(0,1)$, $(2,15)$,
- (e) $(-1,4)$, $(1,2)$, $(2,10)$, $(3,40)$,
- (f) $(-2,38)$, $(-1,5)$, $(1,-1)$, $(2,-10)$, $(3,-7)$,
- (g) $(-2,-33)$, $(-1,-2)$, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,-18)$,
- (h) $(-3,-209)$, $(-2,-43)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(2,-19)$.

(2) *Határozzuk meg a* $(-2,-6)$, $(0,4)$, $(1,-3)$, $(2,-10)$ *pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot! Határozzuk meg azt a minimális fokszámú polinomot, amely az előző pontokon kívül áthalad a* $(-1,2)$ *ponton is!*

Lagrange-interpoláció Matlab-bal

A `polyfit` függvény

`polyfit(x,f,n-1)` Ha x és f n-elemű vektorok, akkor megadja annak a legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomnak az együtthatóit, amely illeszkedik az (x_i, f_i), $i = 1, \dots, n$ adatokra.

Példa

Határozzuk meg Matlab-bal a $(-2,-5), (-1,3), (0,1), (2,15)$ pontokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

Megoldás.

```
>>x=[-2, -1, 0, 2];
>>f=[-5, 3, 1, 15];
>>p=polyfit(x,f,3)
p=
   2.0000 1.0000 -3.0000 1.0000
```

Ábrázoljuk a pontokat és az illesztett függvényt!

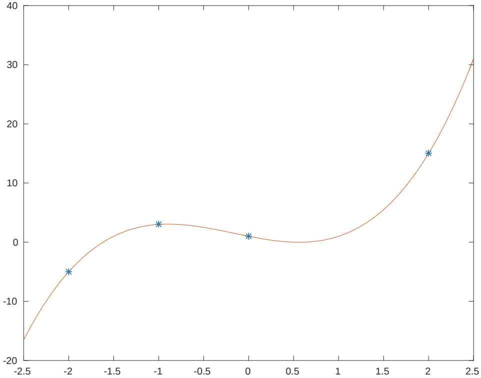
```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```

A `polyval` függvény:

`yy=polyval(p,xx);`

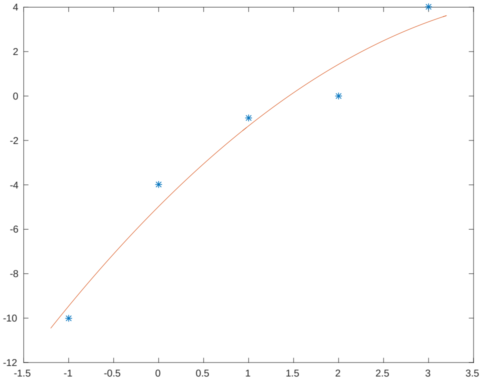
a `p` együtthatójú polinom értékeit adja az `xx` vektor koordinátáiban.
(p-ben a polinom együtthatói a főegyütthatóval kezdve szerepelnek)

```
x=[-2, -1, 0, 2];
f=[-5, 3, 1, 15];
p=polyfit(x,f,3);
xx=linspace(-2.5,2.5);
yy=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,yy)
```



Fontos! Ha a `polyfit` függvényben nem megfelelően írjuk elő a polinom fokszámát, akkor a polinom nem feltétlenül illeszkedik az adatokra.

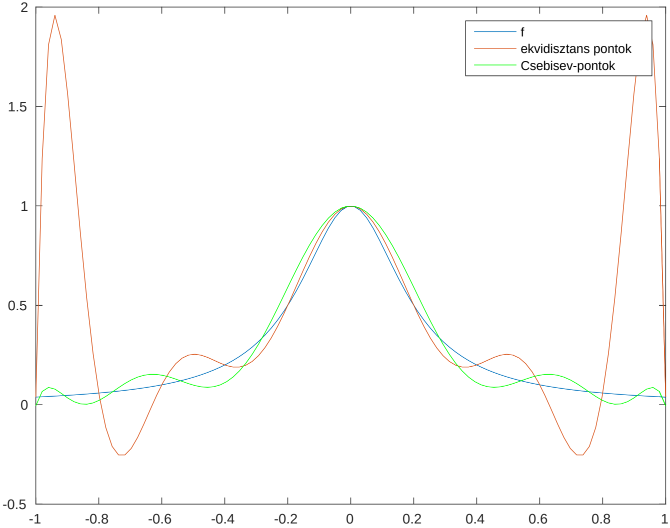
```
x=[-1 0 1 2 3]; f=[-10 -4 -1 0 4]; p=polyfit(x,f,2);
xx=linspace(-1.2,3.2); ff=polyval(p,xx);
figure; plot(x,f,'*',xx,ff)
```



*Feladat

Rajzoltassuk ki közös ábrára az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1,1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{22}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 11$$
alappontokhoz (Csebisev-pontok) tartozó Lagrange-polinomját.



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
f
ekvidisztans pontok
Csebisev-pontok

Hermite-interpoláció

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

Megoldás. Az illeszkedési feltételek száma: $m = 7$, így az Hermite-polinom legfeljebb 6-odfokú lesz.

Készítsük el az osztott differenciák táblázatát!

A kiinduló adatok:

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	-10	-2	2
$f'(x_i)$	-20	10	10
$f''(x_i)$		-16	

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & -10 & & \\
 & & -20 & \\
-2 & -10 & & \\
 & & & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -8 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & & \\
1 & 2 & & \\
 & & 10 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

Számoljuk ki a hiányzó értékeket!

$$\begin{array}{r|rrr}
-2 & -10 & & \\
 & & -20 & \\
-2 & -10 & & \\
 & & & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -8 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & & \\
1 & 2 & & \\
 & & 10 & \\
1 & 2 & &
\end{array}$$

A hiányzó elsőrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & -10 & & \\
 & & -20 & \\
-2 & -10 & & \\
 & & 8 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -8 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & \\
 & & 2 & \\
1 & 2 & & \\
 & & 10 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

A hiányzó másodrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrr}
-2 & -10 & & \\
 & & -20 & \\
-2 & -10 & & 28 \\
 & & 8 & \\
-1 & -2 & & 2 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -8 \\
 & & 10 & \\
-1 & -2 & & -4 \\
 & & 2 & \\
1 & 2 & & 4 \\
 & & 10 & \\
1 & 2 & &
\end{array}
$$

A harmadrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & -10 & & & \\
 & & -20 & & \\
-2 & -10 & & 28 & \\
 & & 8 & & -26 \\
-1 & -2 & & 2 & \\
 & & 10 & & -10 \\
-1 & -2 & & -8 & \\
 & & 10 & & 2 \\
-1 & -2 & & -4 & \\
 & & 2 & & 4 \\
1 & 2 & & 4 & \\
 & & 10 & & \\
1 & 2 & & &
\end{array}
$$

A negyedrendű osztott differenciák:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & -10 & & & & \\
 & & -20 & & & \\
-2 & -10 & & 28 & & \\
 & & 8 & & -26 & \\
-1 & -2 & & 2 & & 16 \\
 & & 10 & & -10 & \\
-1 & -2 & & -8 & & 4 \\
 & & 10 & & 2 & \\
-1 & -2 & & -4 & & 1 \\
 & & 2 & & 4 & \\
1 & 2 & & 4 & & \\
 & & 10 & & & \\
1 & 2 & & & &
\end{array}
$$

Az ötödrendű osztott differenciák:

-2	-10					
		-20				
-2	-10		28			
		8		-26		
-1	-2		2		16	
		10		-10		-4
-1	-2		-8		4	
		10		2		-1
-1	-2		-4		1	
		2		4		
1	2		4			
		10				
1	2					

A hatodrendű osztott differencia:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & -10 & & & & & & \\
 & & -20 & & & & & \\
-2 & -10 & & 28 & & & & \\
 & & 8 & & -26 & & & \\
-1 & -2 & & 2 & & 16 & & \\
 & & 10 & & -10 & & -4 & \\
-1 & -2 & & -8 & & 4 & & 1 \\
 & & 10 & & 2 & & -1 & \\
-1 & -2 & & -4 & & 1 & & \\
 & & 2 & & 4 & & & \\
1 & 2 & & 4 & & & & \\
 & & 10 & & & & & \\
1 & 2 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & -10 & & & & & & \\
 & & -20 & & & & & \\
-2 & -10 & & 28 & & & & \\
 & & 8 & & -26 & & & \\
-1 & -2 & & 2 & & 16 & & \\
 & & 10 & & -10 & & -4 & \\
-1 & -2 & & -8 & & 4 & & 1 \\
 & & 10 & & 2 & & -1 & \\
-1 & -2 & & -4 & & 1 & & \\
 & & 2 & & 4 & & & \\
1 & 2 & & 4 & & & & \\
 & & 10 & & & & & \\
1 & 2 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
H(x) = & -10 - 20(x+2) + 28(x+2)^2 - 26(x+2)^2(x+1) \\
& + 16(x+2)^2(x+1)^2 - 4(x+2)^2(x+1)^3 \\
& + 1(x+2)^2(x+1)^3(x-1)
\end{aligned}
$$

Feladat

Határozza meg az alábbi adatokra illeszkedő minimális fokszámú polinomot!

*(a)

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	4	6	94
$f'(x_i)$	9	17	213

(b)

x_i	-2	-1	1
$f(x_i)$	13	3	7
$f'(x_i)$	-31	14	18
$f''(x_i)$		-40	

Feladat

Írja fel az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény x_0-beli érintőjének az egyenletét!

Spline interpoláció Matlab-bal

Példa

Határozzuk meg az alábbi adatokhoz tartozó harmadfokú spline-t!

x_i	-2	-1	0	1	2	3
S	4	1	7	4	12	9
S'	15					8

Megoldás. Használjuk a Matlab `spline` függvényét!

```
p=spline(x,y)
```

Előállítja a szakaszonként harmadfokú spline együtthatóit. Itt `x` az alappontok vektora, az `y` vektor első és utolsó koordinátája a két végpontban adott deriváltérték, a többi koordináta a függvényértékek.

```
>>x=-2:3; y=[15 4 1 7 4 12 9 8]; p=spline(x,y)
p =
      form: 'pp'
    breaks: [-2 -1 0 1 2 3]
     coefs: [5x4 double]
    pieces: 5
     order: 4
       dim: 1
```

A spline együtthatói:

```
>> p.coefs


ans =
   19.0000  -37.0000   15.0000    4.0000
  -12.0000   20.0000   -2.0000    1.0000
   11.0000  -16.0000    2.0000    7.0000
  -12.0000   17.0000    3.0000    4.0000
   15.0000  -19.0000    1.0000   12.0000
```

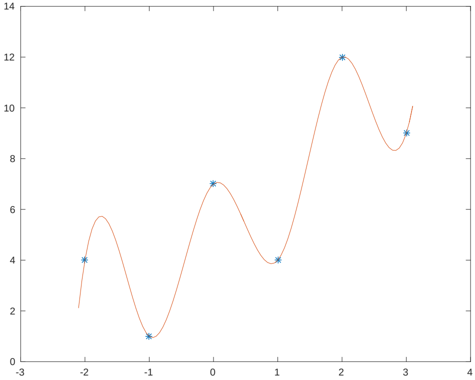
Ha nem az együtthatókat szeretnénk tudni, hanem a spline értékét valamely pont(ok)ban, akkor

```
yy=spline(x,y,xx)
```

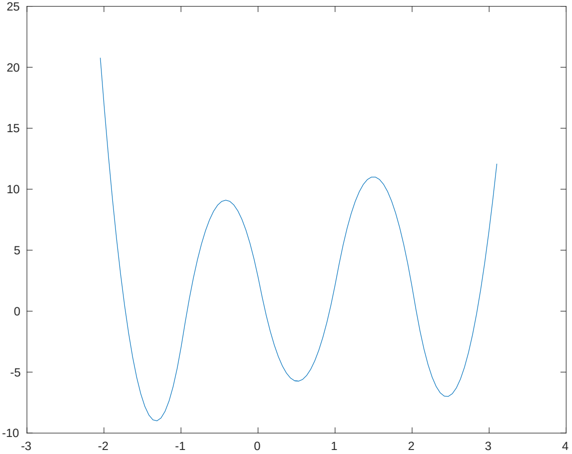
ahol `x` és `y` az előbbi vektorok, `xx` azon pontok vektora, ahol a helyettesítési értéket keressük. Ekkor `yy`-ba kerülnek a kiszámolt függvényértékek.

```
>> x=-2:3;
>> y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
>> xx=linspace(-2.1,3.1);
>> yy=spline(x,y,xx);
>> plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```

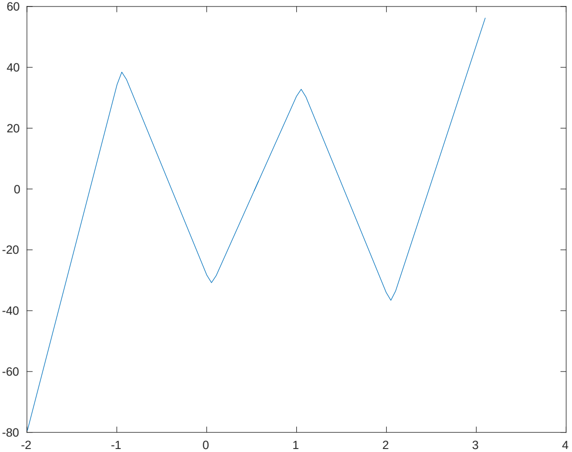
```
x=-2:3;
y=[15 4 1 7 4 12 9 8];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y(2:end-1),'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:



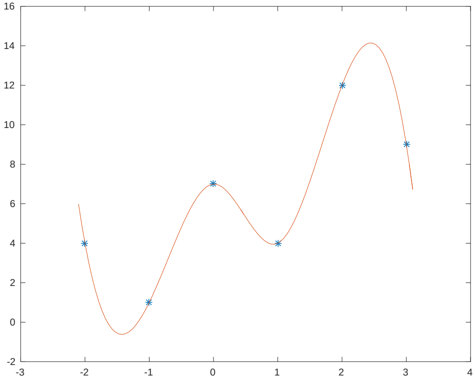
Ez még mindig folytonos, de a részintervallumok határainál töréspontja van.

Megj.

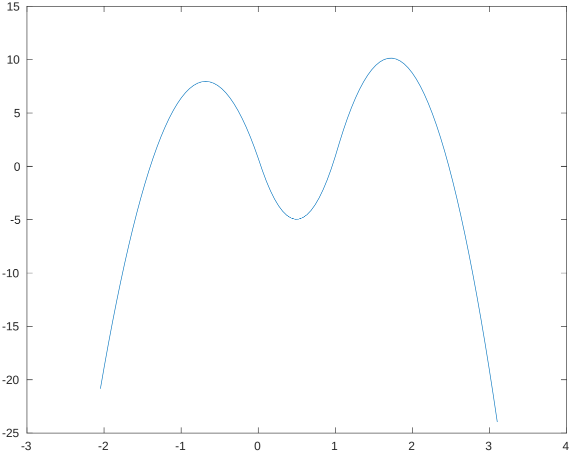
Ha a `spline` függvényt olyan `x` és `y` vektorokkal hívjuk, amelyek ugyanannyi koordinátát tartalmaznak, akkor a hiányzó két feltételt a Matlab azzal helyettesíti, hogy az első és utolsó két részintervallum találkozásánál a harmadik deriváltat is folytonosnak tekinti.

```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```

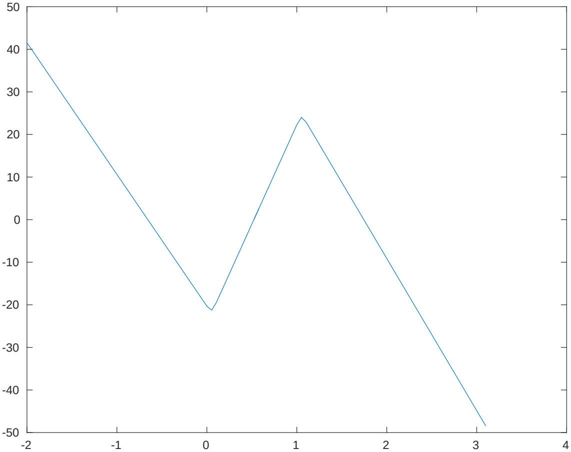
```
x=-2:3;
y=[4 1 7 4 12 9];
xx=linspace(-2.1,3.1);
yy=spline(x,y,xx);
plot(x,y,'*',xx,yy)
```



Az előbb ábrázolt spline 1. deriváltja:



A 2. derivált:

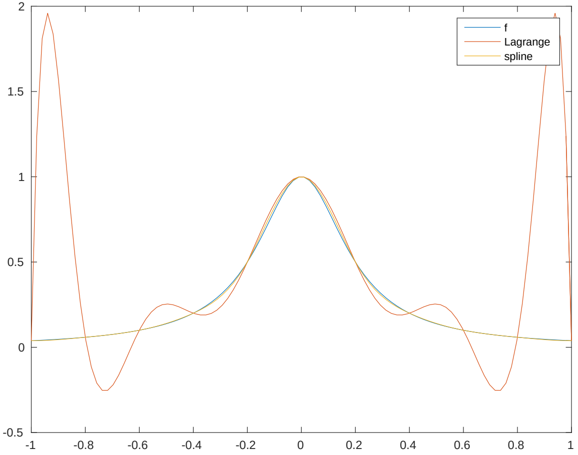


Most az első és utolsó osztópontban (-1-ben és 2-ben) már nincs töréspontja.

*Feladat

Rajzoltassuk ki közös ábrán az alábbi 3 függvényt:

- az
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$
függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
egyenlő lépésközű (ekvidisztáns) alappontokhoz tartozó Lagrange-polinomját
- az f függvény
$$-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1$$
alappontokhoz tartozó harmadfokú spline polinomját. (A végpontokban a deriváltértékeket tekintsük 0-nak.)


f
Lagrange
spline
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Anoním függvények, function handle

Függvényeket definiálhatunk parancssorban is:

```
>> f1= @(x) x.*sin(x);
```

Ilyen módon az $f1(x) = x\sin(x)$ függvényt definiáltuk, hívása pl.:

```
>> y=f1(pi/4)
y=
   0.5554
```

A @ szimbólum után zárójelben szerepelnek a függvény változói (most x), ezt követi a függvény (ez egy ú.n. anoním függvény). Az $=$ baloldalán szereplő változó (most f1) egy ú.n. ,,function handle" típusú változó lesz.

Akár többváltozós függvényeket is megadhatunk így:

```
>> f2= @(x,y) x.^2+x.*y-y+3;
```

Ekkor pl.

```
>> z=f2(2,-1)
z=
  6
```

A function handle tárolja azon változók értékét is, amelyek szükségesek a függvény kiértékeléséhez:

```
>> a=2.5; b=3;
>> f3= @(x) a*sin(x)+b*cos(x);
>> y=f3(-4)
y=
  -0.0689
>> clear a b
>> y=f3(-4)
y=
  -0.0689
```

Numerikus integrálás Matlab-bal

Egyváltozós függvények integrálására pl az `integral` függvényt használhatjuk.

Példa

Matlab segítségével számítsuk ki az

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$$

integrál értékét!

Megoldás.

```
>> f= @(x) x.*sqrt(1+x);
>> integral(f,0,3)
ans=
   7.7333
```

Az `integral` függvény hívása:

```
>> integral(fv,xmin,xmax)
```

ahol `fv` az integrálandó függvény (`fv` egy function handle típusú változó), `xmin` és `xmax` az alsó és felső határ.

Az `integral` függvény adaptív kvadratúrát használ, és alapértelmezésként 10^{-10} abszolút, vagy 10^{-6} relatív hibával számítja ki az integrál értékét.

A hibahatárok átállíthatóak:

```
>> integral(f,0,3,'RelTol',1e-8,'AbsTol',1e-13)
```

Az előző példában nem feltétlenül szükséges létrehozni a `f` változót:

```
>> integral(@(x) x.*sqrt(1+x),0,3)
ans =

    7.7333
```

Ha a függvényt korábban egy m-fájlban definiáltuk, pl.

```
function y=myfnc(x)
   y=x.*sqrt(1+x)
end
```

akkor az `integral` függvénynek átadhatjuk a függvény nevét is (function handle-ként):

```
>> integral(@myfnc,0,3)
```

Hasonló a helyzet a Matlab beépített függvényeivel:

```
>> integral(@sin,0,pi)
ans=
    2.0000
```

Impropius integrálok

- Az integrálás határai lehetnek $-\infty$ és ∞ is:

```
>> f= @(x) exp(-x);
>> integral(f,0,Inf)
ans =
     1
```

- Az sem probléma, ha a függvény az intervallum végpontjaiban nincs értelmezve:

```
>> f= @(x) 1./sqrt(1-x.^2);
>> integral(f,-1,1)
ans=
   3.1416
```

Paraméteres függvények integrálja

Példa:

$$\int_0^5 x^2 - cx + 3dx$$

Adott paraméterérték esetén kiszámítható az integrál:

```
>> f= @(x,c) x.^2-c*x+3;
```

Az integrál értéke $c = 4.5$ esetén a $[0, 5]$ intervallum felett:

```
>> integral(@(x) f(x,4.5),0,5)
ans =
     0.4167
```

Ha nem ismert a függvény

Előfordulhat, hogy nem ismerünk egzakt képletet az integrálandó függvényre, csak bizonyos pontokban ismerjük az értékeit. Ilyenkor a `trapz` Matlab-függvényt használhatjuk.

Példa

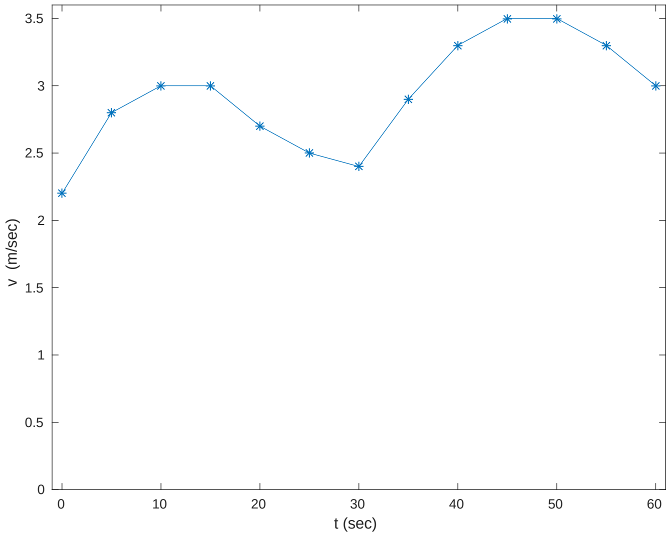
Egy jármű sebességét 1 percen keresztül mértük 5 másodperces időközönként:

t (sec)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
v (m/sec)	2.2	2.8	3	3	2.7	2.5	2.4	2.9	3.3	3.5	3.5	3.3	3

Becsüljük meg a jármű által megtett utat!

Megoldás. Tudjuk, hogy az a idő alatt megtett út:

$$S = \int_0^a v(t)dt$$


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
v (m/sec)
0
10
20
30
40
50
60
t (sec)

A `trapz` függvény segítségével az integrál becslése:

```
>> x=0:5:60;
>> f=[ 2.2 2.8 3 3 2.7 2.5 2.4 2.9 3.3 3.5 3.5 3.3 3];
>> trapz(x,f)
ans =
     177.5000

>> y=cumtrapz(x,f);
```

Ekkor

$$y = (0, 12.5, 27, 42, 56.25, 69.25, 81.5, 94.75, 110.25, 127.25, 144.75, 161.75, 177.5)$$

Az `y` vektor *i*-edik koordinátája az *i*-edik időpillanatig megtett utat mutatja.

Feladatok

Matlab segítségével számítsa ki az alábbi határozott integrálok értékét!

*(a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(x^2)\,dx$$

*(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

*(c)

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Az fzero függény.

Az f nemlineáris függvény olyan gyökének közelítésére, melyek környezetében előjelet vált a függvény.

Ha `f` function handle-ként adott, akkor

- `x=fzero(f,x0)`
  Az `x0` pontból indulva előállítja a gyök `x` közelítését
- `[x,fval,exitflag,output]=fzero(f,x0)`
  Az `x0` pontból indulva előállítja a gyök `x` közelítését, megadja az `x` helyen a függvényértéket (`fval`), a közelítőeljárás leállásának az okát (`exitflag`), és a keresési eljárás néhány részletét (`output`)

Példa

Matlabbal számítsuk ki az $f(x) = e^x - 4x^2$ függvény $[0, 1]$-beli gyökét.

Megoldás.

```
>> f=@(x) exp(x)-4*x^2;
>> [x,fval]=fzero(f,0.5)
x=
  0.7148
fval=
  -4.4409e-16
```

A gyök közelítése 4 tizedesjegyre kerekítve: 0.7148, ebben a pontban a függvényérték $-4.4409 \cdot 10^{-16}$.
Ha több tizedesjegyre akarjuk látni az eredményt állítsuk át a kiiratás formátumát!

```
>> format long
>> x
x=
 0.714805912362778
```

Ha a keresési eljárásról több információt szeretnénk:

```
>> [x,fval,exitflag,output]=fzero(f,0.5)
x =
   0.714805912362778

fval =
    -4.440892098500626e-16

exitflag =
     1

output =
    intervaliterations: 9
            iterations: 6
             funcCount: 25
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: 'Zero found in the interval [0.273726, 0.726274]'
```

Ha ismerünk olyan intervallumot, ahol a függvény előjelet vált, akkor meggyorsíthatjuk a keresési eljárást, ha `x0` helyett ezzel az intervallummal hívjuk az `fzero` függvényt:

```
>> [x,fval,exitflag,output]=fzero(f,[0,1])
x =
   0.714805912362778

fval =
    -4.440892098500626e-16

exitflag =
     1

output =
    intervaliterations: 0
            iterations: 7
             funcCount: 9
             algorithm: 'bisection, interpolation'
               message: 'Zero found in the interval [0, 1]'
```

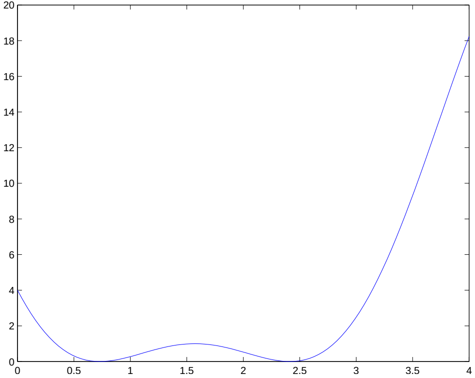
Ha a függvény nem vált előjelet a gyök környezetében, akkor az `fzero` függvény nem találja meg a gyököt:

```
>> f=@(x) 13-9*cos(x).^2-12*sin(x);
>> x=fzero(f,0)
Exiting fzero: aborting search for an interval containing a sign change
    because NaN or Inf function value encountered during search.
(Function value at -Inf is NaN.)
Check function or try again with a different starting value.

x =

   NaN
```

Ábrázoljuk az f függvényt a $[0,4]$ intervallumon!



Az ábra alapján azt sejtjük, hogy a függvénynek 0.5 és 2.5 környezetében van 1-1 gyöke, ahol a függvény nem vált előjelet. Az is látszik, hogy itt a függvénynek minimuma van.

fminbnd

- `x=fminbnd(f,xmin,ymin)`
- `[x,fval,exitflag,output]=fminbnd(f,xmin,xmax)`

Megkeresi az `f` függvény $[xmin, xmax]$ intervallumbeli minimumát.

Példa:

```
>> f=@(x) 13-9*cos(x).^2-12*sin(x);
>> [x,fval]=fminbnd(f,0,1)
x =
    0.7297
fval =
   9.2491e-11
>> [x,fval]=fminbnd(f,2,3)
x =
    2.4119
fval =
   1.7231e-13
```

Ha az ábra alapján -vagy egyéb rendelkezésre álló információ alapján- úgy látjuk, hogy a függvénynek olyan gyöke van, ahol nem vált előjelet, és ez a függvény lokális maximuma, akkor az `fminbnd` függvényt $-f$-re hívjuk meg.

Fontos! Mindig ellenőrizzük (a függvényérték kiiratásával), hogy az adott szélsőértékhely valóban gyökhely-e.

Polinomok gyökeinek keresésére az `roots` függvényt használhatjuk: keressük meg az $x^4 + x^3 - x - 1$ polinom gyökeit!

```
>> p=[1 1 0 -1 -1];
>> roots(p)
ans =
   1.0000 + 0.0000i
  -0.5000 + 0.8660i
  -0.5000 - 0.8660i
  -1.0000 + 0.0000i
```

Feladatok

*(a) Közelítse a $3x = \cos(x)$ egyenlet gyökeit!

*(b) Közelítse a $3x^3 - 12x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit!

*(c) Közelítse az $e^x = \sin(x)$ egyenlet gyökeit!

*(d) Közelítse az $\ln(x) = 2 - x$ egyenlet gyökét!

*(e) Közelítse a $\cos^2(x) + 2\sin(x) = 2$ egyenlet gyökét!

*(f) Közelítse az $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit!